Chapitre 3

Calcul matriciel

1. Définitions et Vocabulaire

a. Définitions d'une matrice

Définition
Une matrice de dimension n×p est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes

Exemples

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour dimension 3×4
Elle comporte 3 lignes et 4 colonnes

C'est une matrice **quelconque**

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 7 \\ 4 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour dimension 4×4
Elle comporte 4 lignes et 4 colonnes

C'est une matrice **carrée**

$$\begin{bmatrix} 7 & 13 & 11 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour dimension 1×5
Elle comporte 1 lignes et 5 colonnes

C'est un **vecteur ligne**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour dimension 5×1
Elle comporte 5 lignes et 1 colonnes

C'est un **vecteur colonne**

b. Vocabulaire

- Les nombres dans les matrices se nomment : les **coefficients** de la matrice
- On note a_{ij} le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j.
- Toute matrice est de la forme : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots\dots\dots & a_{3p} \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots\dots\dots & a_{np} \end{bmatrix}$
- Une matrice **carrée** est une matrice avec le même nombre de lignes et de colonnes On a alors n = p.
- Un **vecteur colonne** est une matrice avec une seule colonne
- Un **vecteur ligne** est une matrice à une seule ligne
- Deux matrices sont **égales** si elles ont la même dimension et les coefficients situés à la même place sont égaux.

c. Transposée d'une matrice

Définition
La transposée d'une matrice est obtenu en échangant les lignes et les colonnes
Si A est une matrice alors sa transposée se note : ${}^{t}A$
Les lignes de A sont les colonnes de ${}^{t}A$

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots\dots\dots & a_{3p} \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots\dots\dots & a_{np} \end{bmatrix}$ alors ${}^{t}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots\dots\dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots\dots\dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots\dots\dots & a_{n3} \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & . & \dots\dots\dots & . \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \dots\dots\dots & a_{np} \end{bmatrix}$

Exemples

$$A=\begin{bmatrix}3 & 7 & 8 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 10 & 2\end{bmatrix} \qquad {}^tA=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 7 & 1 & 6\\ 8 & 4 & 10\\ 7 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 6 & -5 & 7\\ 4 & 7 & 8 & 1\\ 0 & 8 & 2 & -5\\ 0 & 0 & -1 & 6\end{bmatrix} \qquad {}^tB=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 6 & 7 & 8 & 0\\ -5 & 8 & 2 & -1\\ 7 & 1 & -5 & 6\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}4 & 10 & 3 & 4\end{bmatrix} \qquad {}^tC=\begin{bmatrix}4\\ 10\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}5\\ 2\\ 1\\ 6\end{bmatrix} \qquad {}^tD=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

2. Additions et Soustractions

a. Les additions et soustractions de matrices

Règle de calcul
La somme (ou la différence) de deux matrices A et B de même dimension est la matrice obtenue en ajoutant (ou soustrayant) les coefficients de A et B situés à la même place.

Exemple

Si $A=\begin{bmatrix}3 & 7 & 8 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 10 & 2\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4 & 7\\ 1 & 3 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 9\end{bmatrix}$ alors $A+B=\begin{bmatrix}3 & 10 & 12 & 14\\ 3 & 4 & 10 & 6\\ 5 & 6 & 11 & 11\end{bmatrix}$

<u>Remarque :</u>
A+B a la même dimension que A et B.

b. Multiplication par un réel

Règle de calcul
Le produit d'une matrice par un réel λ, est la matrice $\lambda \times A$ obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ.

<u>Exemples</u>

$$\text{Si} \quad A=\begin{bmatrix}3 & 7 & 8 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 10 & 2\end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad 10A=\begin{bmatrix}30 & 70 & 80 & 70\\ 20 & 10 & 40 & 50\\ 50 & 60 & 100 & 20\end{bmatrix}$$

$$\text{Si} \quad A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{7}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\\ \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad 3A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 8 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 10 & 2\end{bmatrix}$$

$$\text{Si} \quad A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 8 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 10 & 2\end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad \frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{8}{2} & \frac{7}{2}\\ \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{10}{2} & \frac{2}{2}\end{bmatrix}$$

3. Multiplications

a. Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne

Règle de calcul

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + ... + a_{n-1} \times b_{n-1} + a_n \times b_n$$

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 4 \times 1 + 2 \times 5 + 0 \times 4 + 1 \times 0 = 17$$

b. Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Règle de calcul
Pour multiplier une matrice A (n×**p**) par un vecteur colonne B(**p**×1), on multpilie chacune des n lignes de la matrice A par le vecteur colonne B
On obtient alors un vecteur colonne

Exemples

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ alors $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 4 \times 7 \\ 3 \times 5 + 2 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 29 \end{bmatrix}$

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ alors

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 0 + 1 \times 0 \\ 3 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alors

$$A\times B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times 0+4\times 1+1\times 0 \\ 3\times 0+2\times 1+2\times 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alors

$$A\times B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times 0+4\times 0+1\times 1 \\ 3\times 0+2\times 0+2\times 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ alors

$$A\times B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x+4y+1z \\ 3x+2y+2z \end{bmatrix}$$

d. Produit de deux matrices

Règle de calcul

Si A (a_{ij}) est une matrice de dimension n×p et B (b_{ij}) est une matrice de dimension p×m alors C=A×B (c_{ij}) est une matrice de dimension n×m et C_{ij} est le produit de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B.

Exemple

Si $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ alors $A\times B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$A\times B=\begin{bmatrix} 2\times 0+4\times 0+1\times 1 & 2\times 1+4\times 1+1\times 5 & 2\times 4+4\times 7+1\times 6 \\ 3\times 0+2\times 0+2\times 1 & 3\times 1+2\times 1+2\times 5 & 3\times 4+2\times 7+2\times 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 11 & 42 \\ 2 & 15 & 38 \end{bmatrix}$$

e. Propriétés de la multiplication

La multiplication **n'est pas commutative** : $A \times B \neq B \times A$

Exemple

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 4\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\4 & 5\end{bmatrix}$$

La multiplicatin est **distributive** par rapport à l'addition : $A \times (B + C) = A \times B + B \times C$

Exemple

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\4 & 5\end{bmatrix} \text{ et } C=\begin{bmatrix}1 & 7\\8 & 2\end{bmatrix}$$

La multiplication est **associative** $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Exemple

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\4 & 5\end{bmatrix} \text{ et } C=\begin{bmatrix}1 & 7\\8 & 2\end{bmatrix}$$

4. Matrice unité et Inverse

a. Définition

Définition I_n est une matrice unité si $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $a_{ii} = 1$ et $a_{ij}=0$ si $i \neq j$ Tous les coefficient de la diagonale sont égaux à 1 et les autres sont tous nuls

Exemple

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Définition
Soit A une matrice carrée n × n.
La matrice A^{-1} est l'inverse de A ssi $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$

Exemple

Si $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ alors $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

En effet : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_3$

b. Recherche de l'inverse d'une matrice

Règle de calcul
Pour déterminer l'inverse d'une matrice M carée d'ordre n, on recherche une matrice N dont les coefficients sont des inconnues telle que $M \times N = I_n$

Exemple

Soit $M=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ On cherche une matrice N telle que $MN = I_2$

On pose $N=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

On a alors $M=\begin{bmatrix}3a+2c & 3b+2d\\ 2a-c & 2b-d\end{bmatrix}$

Ainsi, MN = I equivalent à $\begin{bmatrix}3a+2c & 3b+2d\\ 2a-c & 2b-d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Ou encore : 3a + 2c = 1

3b + 2d = 0

2a - c = 0

2b - d = 1

On trouve a = 1/7, b = 2/7, c = 2/7 et d = -3/7

On en déduit que la matrice M est inversible et $M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{-3}{7}\end{bmatrix}$

Remarque :

Soit $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2

A est inversible si, et seulement si a d - bc ≠ 0

Si A est inversible, on démontre facilement que $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

5. Résolution de systèmes d'équations

Exemple

Je souhaite résoudre $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 3x+5y=-7 \end{cases}$

or, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x-3y \\ 3x+5y \end{bmatrix}$

ce système est équivalent à l'équation suivante : AX = B

avec $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}$

or A X = B ⇔ $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$

donc A × X = B ⇔ $I_2 * X = A^{-1} \times B$ ⇔ $X = A^{-1} \times B$

Il reste donc à calculer A^{-1} et de calculer $A^{-1} \times B$

pour obtenir x et y. Attention A^{-1} est à gauche dans $A^{-1} \times B$

On trouve $A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{19} & \dfrac{3}{19} \\ \dfrac{-3}{19} & \dfrac{2}{19} \end{bmatrix}$

donc $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{19} & \dfrac{3}{19} \\ \dfrac{-3}{19} & \dfrac{2}{19} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{19}\times 8-\dfrac{3}{19}\times 7 \\ \dfrac{-3}{19}\times 8-\dfrac{2}{19}\times 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{19}{19} \\ \dfrac{-38}{19} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

⇒ x = 1 et y = -2

6. Autres calculs

a. Puissances de matrices

Pour calculer A^n on effectue $A \times A \times A \ldots\ldots \times A$ (n fois)

Exemple

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ montrer que $J^3 = 0$

b. Image d'une matrice par une fonction polynôme

On note la fonction $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$
Soit A une matrice carrée $n \times n$
Pour calculer $f(A)$ on effectue $(A - 2I_n)(A - 3I_n)(A - 5I_n)$

Exemple

Si $$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ montrer que $f(A) = 0$